OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA
ETAPA JUDEȚEANĂ, IAȘI, 12.03.2022
BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE
Clasa a VI-a

NOTĂ: ORICE SOLUȚIE CORECTĂ ÎN AFARĂ DE CEA DIN BAREM SE PUNCTEAZĂ CORESPUNZĂTOR

Subiectul 1

Se consideră mulțimile $A=\left\{p^2 /\ p\in\mathbb{N}\right\}$, $B=\{5n+2/\ n\in\mathbb{N}\}$ și $C=\{7m+6/\ m\in\mathbb{N}\}$.

a) Arătați că A și B sunt mulțimi disjuncte.
b) Verificați dacă 2022 este element comun mulțimilor B și C.
c) Arătați că suma fracțiilor subunitare care au numărătorul element al mulțimii A cu $p<3$ și numitorul element al mulțimii B cu $n\le 2$, este un număr rațional mai mic decât 2.

Soluție: a) Dacă $x\in A\Rightarrow x=p^2, p\in\mathbb{N}\Rightarrow u(x)\in\{0,1,4,5,6,9\}$ ……………..……………………………..1p

Dacă $y\in B\Rightarrow y=5n+2, n\in\mathbb{N}\Rightarrow u(y)\in\{0+2,5+2\}\Rightarrow u(y)\in\{2,7\}$ …………….…………..1p

Obține $A\cap B=\phi$ ………………………………………………………..…………………1p

b) $2022=5\cdot 404+2\Rightarrow 2022\in B$ 1p

$2022=288\cdot 7+6\Rightarrow 2022\in C$. Astfel $2022\in B\cap C$ 1p

c) Pentru $p<3\Rightarrow A'=\{0,1,4\}$, iar pentru $n\le 2\Rightarrow B'=\{2,7,12\}$ ………………………...........1p

Obține $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{4}{7}+\frac{4}{12}=\frac{274}{168}<2$ ……………………………………………………..…..1p

Subiectul 2

La concursul național de matematică "*Olimpiada Satelor*" sunt pregătite pentru premiere 156 de cărți, 243 de căști wireless și 274 stickuri de memorie. Știind că fiecare premiant a primit același număr de obiecte, iar la finalul premierei au rămas 6 cărți, 3 căști și 4 stickuri, aflați numărul de premianți ținând cont că acesta este mai mare decât 20.

Soluție: Dacă x este numărul de premianți $\Rightarrow x>20$ și $x\in D_{150}, x\in D_{240}$ și $x\in D_{270}$ 3p

Obține $x\in D_{(150,240,270)}\Rightarrow x\in D_{30}$ 2p

Obține $x\in\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, dar $x>20\Rightarrow x=30$ 2p

Subiectul 3

a) Știind că a și b sunt numere raționale cu proprietatea că $\frac{3a+4b}{7a-5b}=\frac{17}{11}$, aflați valoarea raportului $\frac{4a+3b}{5a-7b}$.

b) Aflați măsurile a trei unghiuri formate în jurul unui punct care au măsurile direct proporționale cu numerele 4, 6 și 8.

Soluție: a) $\frac{3a+4b}{7a-5b}=\frac{17}{11} \Leftrightarrow 11(3a+4b)=17(7a-5b) \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ 2p

Din $a=3k$ și $b=2k \Rightarrow \frac{4a+3b}{5a-7b}=\frac{4\cdot 3k+3\cdot 2k}{5\cdot 3k-7\cdot 2k}=18$ 2p

b) $A+B+C=360^\circ$ 1p

$A=4k, B=6k, C=8k$ 1p

Obține $k=20^\circ \Rightarrow A=80^\circ, B=120^\circ, C=160^\circ$ 1p

Subiectul 4

Se consideră unghiul $\sphericalangle XOY=30^\circ$ și semidreptele OA și OB exterioare unghiului $\sphericalangle XOY$, astfel încât $\sphericalangle XOA=\sphericalangle YOB=90^\circ$ și așezate în semiplanul determinat de dreapta OY și un punct oarecare de pe semidreapta OX.

a) Arătați că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle XOY$.

b) Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle XOY$.

Soluție: a) Realizează un desen corespunzător enunțului 2p

$\sphericalangle AOB=90^\circ-\sphericalangle BOX$ și $\sphericalangle XOY=90^\circ-\sphericalangle BOX$, deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle XOY$ 2p

b) Determină $\sphericalangle BOX=60^\circ$ 1p

Dacă OM, ON sunt bisectoarele unghiurilor AOB, respectiv $XOY \Rightarrow \sphericalangle MOB=\sphericalangle XON=15^\circ$ 1p

Determină $\sphericalangle MON=90^\circ$ 1p